

Введение

Математика всегда влияла на искусство. Математические концепции, такие, как золотое сечение, платоновы тела и проективная геометрия, широко используются художниками и скульпторами, а пифагорейское арифметическое восприятие гармонии по сей день доминирует в западной музыке. Бесконечность и теория вероятности вдохновляла художников, таких, как М. К. Эшер, и композиторов, таких как Яннис Зенакис (Iannis Xenakis), сформировав особые течения в современном искусстве и музыке. Эволюция технологии создала новые области пересечения математики с искусством или музыкой: цифровое искусство, компьютерная музыка и новые медиа.

Открытие теории хаоса ввело математику в новую зачаровывающую и интригующую реальность: саму природу. До этого ученые могли лишь наблюдать нелинейный динамический характер природных структур и процессов. Теперь у них появились математические инструменты, подобные метеорологическим системам и эффекту бабочки, которые описали, объяснили и доказали хаотические свойства природы. Компьютеры, способные рассчитывать нелинейные динамические системы и визуализировать результаты в течение продолжительного времени, стали неотъемлемой частью этой научной революции; ученые получили возможность наблюдать хаотическую эволюцию природных явлений на экране компьютера. Так возникли причудливые формы, несимметричные геометрические объекты и необычные фигуры, открывшие мир, где нереальное (графические репрезентации алгоритмических процессов) свидетельствовало о реальном (природе). Бенуа

Мандельброт был первым математиком, который сформулировал эту новую область в виде особой самостоятельной теории, которая сразу же стала очень популярной. Он ввел неологизм «фрактал», чтобы объединить все эти странные объекты одним термином. «Я придумал слово “фрактал” от латинского прилагательного “fractus”. Соответствующий латинский глагол “frangere” означает «ломать», создавать фрагменты неправильной формы. Из этого, логично, — и так подходяще для наших целей! — следует, что в дополнении к значению “фрагментированный” (как в словах “фракция” или “рефракция”) слово “fractus” должно бы также означать “неправильный по форме”, причем эти оба значения содержатся в слове “фрагмент”»¹.

Фракталы тут же привлекли к себе внимание художников. Случился буквально художественный бум на фракталы, в результате чего появилось цифровое искусство, которое быстро стало популярным как внутри, так и вне художественного и научного сообществ. Почти одновременно с этим возник интерес музыкального плана, сосредоточенный, в основном, в области алгоритмических композиций. Вследствие этого встал вопрос: Представляет ли собой фрактальное искусство явление следующего большого стиля? Является ли фрактальное искусство выполнением миссии искусства? Приближаемся ли мы *ближе к Небесам?*

Что же такое фрактал?

Фрактальная геометрия (и немного топологии). *Топологическая размерность* множества определяется как число независимых параметров, необходимых для описания точки в некотором множестве. Например, точка на плоскости описывается двумя независимыми параметрами (известными как картезианские координаты точки), так что в этом смысле плоскость является двухмерной. По определению топологическая размерность — всегда натуральное число. Однако топологическая размерность ведет себя совершенно неожиданным образом в случае некоторых в высшей степени иррегулярных множеств, таких, как фракталы. *Кубическая размерность (box dimension)* представляет другой способ определить размерность для таких множеств.

1 Benoit B. Mandelbrot. The Fractal Geometry of Nature, New York: W. H. Freeman & Co, 1982, p. 4.

Пусть F является фракталом в трехмерном пространстве, а $N(r)$ — минимальное число кубов со стороной меньше или равной r , необходимое для того, чтобы полностью заключить в себе F во всем его объеме. Очевидно, что с уменьшением r величина $N(r)$ становится больше. В очень грубом приближении $N(r)$ оказывается пропорциональна $1/r^d$ при $r \rightarrow 0$, где d — действительное число. Тогда d является кубической размерностью F . Кубическая размерность измеряет способность к заполнению пространства, т. е. она уточняет понятие топологической размерности, соотнося ее с другими свойствами пространства, такими, как объем.

Неожиданным оказывается то, что кубическая размерность, являясь действительным числом, чаще всего оказывается дробной. Фракталы и множества неправильной формы имеют не целую, а дробную размерность. Существуют различные тесно связанные понятия дробных размерностей. Обычно они называются *фрактальными размерностями*. Заметим, что «фрактал» — это неологизм и как таковой семантически не имеет отношения к слову «дробный». Мандельброт формально определил фрактал как множество с кубической размерностью строго большей, чем его топологическая размерность. Однако определение оказалось неудовлетворительным в том смысле, что оно исключало некоторые множества, которые, очевидно, должны были рассматриваться в качестве фракталов. Как отмечает Кеннет Фалконер, «к определению “фрактала” следует относиться так же, как биолог относится к определению понятия “жизнь”... просто как к перечню свойств, характерных для живого существа <...> Большинство живых существ имеют большинство характеристик из этого перечня, хотя существуют живые объекты, которые являются исключением для каждой из них. Подобным же образом, по-видимому, лучше всего рассматривать фрактал как множество, которое имеет перечень свойств, чем искать точное определение, которое почти наверняка исключит некоторые интересные случаи»². Исходя из этого, фрактал F (определяется как) геометрический объект, который обычно имеет следующие характеристики:

1. F имеет тонкую структуру, т. е. содержит детали сколь угодно малых масштабов.
2. F слишком нерегулярен для описания на традиционном геометрическом языке, как локально, так и в целом.

2 Kenneth Falconer. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Application*, Chichester: John Wiley & Sons, revised edition, 2002, pp. xx-xxi.

3. F обладает некоторой формой самоподобия, по крайней мере, приближительной или стохастической.
4. F имеет «фрактальную размерность» (определенную некоторым способом), большую, чем его топологическая размерность.
5. F имеет простое и рекурсивное определение в большинстве случаев, представляющих интерес.

Фракталы обычно получаются следующими тремя методами:

1. Фракталы, получаемые с помощью алгоритма времени убегания: определяются рекуррентными отношениями в каждой точке пространства.
2. Системы итерируемых функций: существует фиксированное правило геометрического замещения.
3. Случайные фракталы: генерируются в результате стохастических, а не детерминированных процессов.

Фракталы могут быть также классифицированы в зависимости от степени самоподобия. Выделяют три типа самоподобия фракталов, которые приведены ниже в прямом соответствии с методами генерации, представленными выше:

1. Квазиподобие: фрактал оказывается приблизительно (но не точно) идентичным в разных масштабах. Квазиподобные фракталы содержат маленькие копии всего фрактала в искаженной и вырожденной форме. Это слабая форма самоподобия.
2. Точное самоподобие: фрактал оказывается идентичным в разных масштабах. Это самый строгий тип самоподобия.
3. Статистическое самоподобие: фрактал имеет численные или статистические параметры, которые сохраняются во всех масштабах. Это самый слабый тип самоподобия.

Теория хаоса. Теория хаоса описывает поведение систем нелинейных динамических уравнений, подвергаемых итерации. Итерация относится к процессу, в котором исходное значение для системы уравнений является информацией на входе, а информация на выходе отправляется обратно в систему в качестве нового значения на входе. Тот же самый процесс повторяется на бесконечно большом количестве ша-

гов. Каждый шаг выдает некоторую величину, которая репрезентирует точку в n -мерном пространстве (n определяется количеством переменных в уравнении). Траектория системы определяется как множество этих точек, получаемых в течение длительного времени. Аттрактор системы — множество, к которому сходится траектория.

Существует три типа поведения, которое система может демонстрировать при итерации: постоянное, когда все точки траектории стремятся к постоянному значению; колебательное, когда все точки траектории поверхности принадлежат повторяющемуся множеству; и хаотическое, когда ни одна из точек траектории не повторяется дважды за некоторый конечный период времени. Последний тип поведения самый интересный. Система блуждает в пределах некоторого диапазона точек, часто возвращаясь к близким, но никогда к абсолютно идентичным точкам, и ее аттрактор, с геометрической точки зрения, является сложным множеством с фрактальными характеристиками и называется странным аттрактором или фрактальным аттрактором. Странные аттракторы фактически являются фракталами, принадлежащими к числу самых интересных и красивых. Наиболее существенная характеристика странного аттрактора — его чувствительность к начальным условиям, т. е. незначительные отличия в значениях на входе системы могут давать кардинально отличающиеся, неожиданные результаты после некоторого числа итераций³. Иными словами: хаос!

Исторически математические «странные» аттракторы были известны еще до открытия фракталов. Их называли «патологическими», поскольку они не соответствовали евклидовым формам. Однако «математики, которые [их] создали, считали их важными для демонстрации того факта, что мир чистой математики богат разными возможностями, выходящими далеко за пределы простых структур, которые они видели в Природе. <...> Теперь, как указывает Мандельброт, Природа сыграла шутку с математиками. Возможно, у математиков XIX века

3 Gavin O'Brien. Master Thesis, A Study of Algorithmic Composition and its potential for aiding laptop-based interactive performance, M. Phil. in Music & Media Technologies, University of Dublin, Trinity College, 2004, pp. 22—23. (Это явление было обнаружено американским метеорологом и математиком Эдвардом Лоренцом, именем которого назван один из самых известных странных аттракторов. Результаты своих наблюдений Э. Лоренц представил в статье: E. Lorenz. «Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?» (1972) (прим. переводчика)).